Klaus Rödler

Rechnen auf unterschiedlichen Abstraktionsniveaus
Eine didaktische Landkarte für Prävention, Diagnose und Förderung

Wenn man historische Zahlzeichen anschaut, dann fällt auf, dass diese ihren Inhalt unterschiedlich deutlich zeigen, bzw. verschlüsseln. In der Tabelle sehen Sie die Ausgangszahl und die Ergebniszahl der Aufgaben 7-3= und 7+7= .

Aufgabe	Steinzeit	ägyptisch	römisch	heute
7 – 3 = 4	IIIIIII -- IIII	IIII -- IIII III	VII -- IIII	7 -- 4
7+7 = 14	IIIIIII -- IIIIIIIIIIIIII	IIII -- ∩ IIII III	VII -- XIIII	7 -- 14

Eigentlich geht es immer um die gleichen einfachen Operationen. Die Zeichenebene bildet diese immer gleiche Operation aber sehr unterschiedlich ab, je nachdem ob sie als Steinzeitzahl, ägyptisch, römisch oder mit unseren Ziffernzahlen aufgeschrieben ist. Das zeigt uns, dass Zahl nicht gleich Zahl ist und legt zugleich eine Spur zu möglichen *inneren Zahlkonzepten* von Rechnern

Die Steinzeitzahlen und die ägyptischen zeigen die kardinale Grundlage unverschlüsselt. Es sind analoge Abbildungen, die in ihrer Aussage unmissverständlich sind. Allerdings verlieren die älteren Steinzeitzahlen bereits in diesem kleinen Zahlraum an Aussagekraft, da die Anzahl nicht spontan erfassbar ist. Man muss zählen, um sie exakt zu erfassen. Den ägyptischen gelingt es dagegen, über Musterbildung die kardinale Anzahl sichtbar zu lassen.

Die römischen Zahlen sind ebenfalls deutlich kardinal. Jedoch wird hier eine symbolische Wertebene als Baustein eingeführt. Das V als Fünfer. Immerhin bleibt dieser Fünfer als Baustein in den nachfolgenden Zahlen erhalten. Die VII steht deutlich zwischen VI und VIII. Die Logik des ‚immer Eines mehr' bleibt trotz der eingefügten Bündelungsebene sichtbar.

Die Subtraktion erfordert an dieser Stelle das Konzept eines ‚reversiblen Fünfers'. Der Fünfer muss als aus 5 Einern gebildet verstanden sein, um zur Lösung zu kommen. (Ich bleibe hier bei der altrömischen Notation, weil die neuere Notation in Form von IV die Grundidee der Argumentation nicht außer Kraft setzt und nur eine hier nicht relevante Problematik ins Spiel bringt.)
Das abstrakte Zahlzeichen 7 hat dagegen jeden Hinweis auf seinen kardinalen Ursprung eingebüßt. Die Zeichen von Vorgänger (6) und Nachfolger (8) stehen in keinem logischen Zusammenhang mit der 7. Es bietet sich an, diese einfach als Zeichenfolge, also eher ordinal zu verstehen und aufzusagen.

Dieser Vergleich gibt einen ersten Hinweis darauf, dass man das Problem des Rechnens (der Operation, der Mathematisierung, der Kommunikation und Argumentation über den Prozess sowie der Darstellung) von dem Problem unserer offenkundig schwierigen Zahlen trennen sollte, um nicht die Probleme des einen Bereichs auf den anderen zu übertragen. Der Blick in die Kulturgeschichte gibt auch einen Hinweis, dass diese Trennung möglich sein muss. Das Rechnen beginnt nicht erst mit Adam Riese vor 500 Jahren und nicht mir unseren Zahlen. Ägypter und Römer hatten hoch entwickelte Kulturen und waren ganz offensichtlich – ohne unsere Zahlvorstellungen, also ohne unser an Positionswerten orientiertes Zahlkonzept – in der Lage, ihre Rechenprobleme zu lösen. In gewisser Hinsicht beginnt das Rechnen mit Zahlen bereits in der Steinzeit, als die Menschen anfingen, ihre Anzahlprobleme in analoge Abbildungen zu übersetzen.

Im Vergleich der Zahlzeichen finden wir zweitens einen Hinweis auf so etwas wie ‚Abstraktionsstufen der Zahl'. Offensichtlich bildet die geordnete Sieben der Ägypter einen ersten bewussten Eingriff in das zunächst lineare Konzept ‚immer eines mehr', das auch unserer Zahlreihe zu Grunde liegt und dem zählende Rechner sich verpflichtet fühlen. Während diese Konzeptveränderung aber die Grundlage des Einzelelements noch nicht aufhebt, bringt die V in Form einer materialisierten Fünf eine Bündelungsebene ins Spiel, einen Baustein, der nicht den Wert Eins hat.
Im Gegensatz dazu sind unsere Zahlen keine Bausteine. Die 1 steckt nicht in der 2. Die 2 nicht in der 3. Man muss hinein denken können, was in den Zeichen verschwunden ist.

Die Blick auf die Addition offenbart Weiteres: Er zeigt deutlich die Problematik unseres Positionssystems. Während bei den ägyptischen und römischen Zahlen sichtbar neue Wertebenen im Sinne neuer, größerer Bausteine entstehen, wird unsere Zahl nur etwas länger. In den Worten sagen wir zwar auch ‚vier*zehn*', aber wir zeigen die beiden Elemente nicht. Während die Zehn sich bei den Ägyptern und Römern deutlich sichtbar macht versteckt sich unser Zehner in einer ‚1' an der vorderen Stelle.
Wie unbegreiflich dieser Vorgang dem noch im kleinen Zahlraum zählenden Kind sein muss, kann man nachempfinden, wenn man selbst in eine Zahlwortreihe wechselt, die man nur als Wortreihe kennt, in das Alphabet. Statt 1, 2, 3, 4, .. zählen wir A, B, C, D.. und versuchen zu rechnen. Abgesehen davon, dass wir dabei zwangsläufig zu zählenden Rechnern werden (Versuchen Sie es, indem Sie Aufgaben wie ‚C+D', ‚F-C', C x D' oder ‚H:C' rechnen und dabei ganz in den Buchstabenzahlen bleiben.), würde unsere Rechnung dann aufgeschrieben so aussehen:

F + F = AD *Lesen müssten wir allerdings*: „F plus F ist gleich DJ."

Und wenn wir uns jemand fragt, warum wir AD schreiben, wenn wir JD meinen, dann müssten wir erklären, dass die Zahl AD (gesprochen DJ) ja aus A Jott's und aus D A's gebaut ist.
Das macht uns deutlich, warum rechenschwache Kinde Analogieaufgaben lieben, weil sie nämlich dabei diese verwirrende Problematik der Jott's und A's vollkommen ausblenden können. Was rechnen Sie bei

AD + B = BD – AA =

Vermutlich D+B mit einem A davor und bei der zweiten Aufgabe B-A und D-A. Sie rechnen mit vorne und hinten Einern, wie sie das von ihren Kindern gewohnt sind. Vielleicht versehen Sie jetzt, warum es für ein Kind nahe liegend ist, BA – AD = AC zu rechnen.

Man muss sich klar machen, dass rund 5000 Jahre kulturgeschichtlicher Entwicklungnötig waren, um aus Symbolen für Wertebenen (wie bei den sumerischen, äyptischen oder römischen Zahlen) in Positionen versteckte Wertebenen zu entwickeln. Diese Schwierigkeiten werden in der Grundschule deutlich unterschätzt. Manche glauben sie in einem Schuljahr meistern zu können.

Kernbotschaften

Kernbotschaft	Rechenmittel	Abstraktions-niveau	Aufgabentyp
Grundlegung der Zahl und der Operationen			
Anzahl als Eigenschaft einer Menge. (Auch: Invarianz, Repräsentanz, Klassifikation)	Alle Zählmittel wie Steine, Würfel, Chips, Plättchen Auch: Darstellung in Strichlisten und Punktmustern	Analoge Abbildung (ungeordnet)	Zählen, Anzahlen vergleichen (direkt/ indirekt am Zählmittel) Zahldarstellungen relle Mengen zuordnen Elementare Rechenaufgaben (+/-/x/:)
Zahl als Glied in der Zahlreihe	Alle Zählmittel und reellen Gegenstände	Analoge Abbildung	Abzählaufgaben
Weg vom zählenden Rechnen und der ungegliederten Zahl			
Ordnung und Gliederung	Gefärbte Würfel Geordnete Strich-listen Punktmuster	Analoge Abbildung (geordnet)	Addition und Subtraktion im ZR bis 10/20 Zerlegungen (vorrangig bis 5)
Bündelung und Strukturierung	Gefärbte Fünferstangen und Würfel (später auch Zehnerstangen)	Konkrete Bündelung	Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 20/25 Dabei auch bei den Fünferstangen Aufgaben mit Zehnerübergang, der auf der Ebene der Fünfer gerechnet wird.
Dezimalstruktur	REMA-Material Zehnerstäbe und Plättchen --------- Rechenstrich	Konkrete Bündelung --------- je nach innerem Zahlkonzept	Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100 (Schwerpunkt: ZE +-E mit Zehnerübergang) --------------------- Addition und Subtraktion mit Zehnerübergang
Zahl als Symbol und Rechnen in Wertebenen			
Idee der Bündelung **Dimension unterschiedlicher Wertebenen**	Erbsen und ähnliche Zählmittel, die in großer Zahl verfügbar sind. (Linsen, Sonnenblumenkerne, etc.)	Analoge Abbildung (geordnet)	Abzählen großer Anzahlen Auch: Als Statistik großer Mengen (vorbeifahrende Autos)
Zahl als Symbol **Zahl als Konvention**	Geld -------- Erbsen, Bohnen, Nudeln	Symbolische Bündelung	Geld schon ab der 1. Klasse, in Analogie zu konkreter Bündelung (1-Cent/5-Cent) Später auch 10 Cent --------------- Mit Erbsen, Bohnen, etc. alle 4 Grundrechenarten!!! im Zahlenraum bis 10.000
Positionssystem	Rechenbrett mit Calculi	Konkretes Stellenwert-system	Alle 4 Grundrechenarten im Zahlenraum bis 10.000 (Vor allem auch Aufgaben mit Übergängen.)
Ziffernschreibweise	Rechenbrett mit Apices	Konkretes Stellenwert-system mit Ziffern	Alle 4 Grundrechenarten im Zahlenraum bis 10.000 (Vor allem auch Aufgaben mit Übergängen.)
Stellenwertkonzept unserer Zahlen	Unsere Zahlen	Abstraktes Stellenwert-system	Grundrechenarten im ZR bis 1.000 mit halbschriftlichen Verfahren und schriftlichen Verfahren. (Subtraktion beachten!)

Insgesamt zeigt eine Analyse der kulturellen Entwicklung von Zahlzeichen und Rechenverfahren benennbare ‚*Abstraktionsstufen*' in der Entwicklung des Zahlbegriffs und – damit eng verbunden, zentrale ‚*Kernbotschaften*', die dabei eingebaut wurden. Diese Kernbotschaften müssen von den Kindern allmählich in den eigenen Zahlbegriff eingebaut werden, damit sie zu kompetenten Rechnern werden können. Zählende Kinder nutzen oft nicht einmal den Aspekt ‚Zerlegung und Gliederung'. Manche verstehen Zahlen als Wortreihen, haben also gar keine kardinale Zahl und sind in der Konsequenz oft noch variant.

Die abgebildete Übersicht auf Seite 3 stellt eine didaktische Landkarte dar, die für den Aufbau des Lehrgangs ebenso genutzt werden kann wie für Diagnose- und Förderung. Sie macht in der ersten Spalte deutlich, welche zentralen Kernbotschaften wie aufeinander aufbauen. Grundlage aller strukturierten Zahlkonzepte ist ein kardinales Zahlverständnis. (Die Zahl als Glied in der Zahlreihe in Verbindung mit den konventionellen Schreibungen spielt in der Tabelle nur insofern eine Rolle, als wird diese Worte und Zeichen für die Kommunikation brauchen. Sie sagt aber nichts über das innere Zahlkonzept, mit dem gerechnet wird!)
Ohne kardinale Zahl sind Ordnung und Gliederung, bzw. das Teile-Ganzes-Prinzip (Gerster 2000) nicht zu verstehen. Ordnung und Gliederung, bzw. das Teile-Ganzes-Prinzip sind aber die Grundlage für das Verständnis reversibler Wertebenen. Zunächst in Form konkreter Bündelungen (Fünferstange, Zehnerstange, Mehrsystemblöcke), dann als symbolisch Bündelung (Geldmünzen, eigene Bündelungsobjekte mit festgelegten Wertebenen).
Und erst von einem Denken in reversiblen Wertebenen her lässt sich der letzte Schritt tun, der zu einem echten Positionssystem. Dieses wird daran sichtbar, dass nicht nur Ziffern richtig in Stellenwerttafeln geschrieben werden können, sondern dass zum einen konkret mit Stellenwerten operiert werden kann und dass zum anderen verstanden (!) ist, warum 2,1 nicht weniger ist als 2,10.
Dass das in der Grundschule nicht immer erreichbar ist, zeigt sich deutlich am Rechnen mit Größen, bei dem das Komma im Allgemeinen von den Kindern eher als eine Trennung von großer und kleiner Einheit denn als Übergang von Einern zu den Dezimalbrüchen Zehntel, Hundertstel, Tausendstel, usw. verstanden wird.

Die zweite Spalte soll – in Verbindung mit der vierten – zeigen, welche Rechenmittel und welche Aufgabentypen die Entwicklung und Festigung der jeweiligen Kernbotschaft unterstützen. Dies gilt vor allem, wenn man im Sinne des hier vorgeschlagenen Konzepts präventiv arbeitet, das heißt den Lehrgang und die Förderung von Anfang an den Kernbotschaften ausrichtet.
Aus dem Blickwinkel höherer Klassen und bei der Förderung älterer Kinder müssen andere Aspekte mit einbezogen werden, insbesondere der Aspekt des Selbstwerts (Es dürfen keine ‚Babyaufgaben' sein.) und des Bezugs zum aktuellen Unterricht. (Die Förderung darf den Rückstand nicht vergrößern.) Hier macht es unter Umständen Sinn, zentrale Aspekte wie Zerlegung oder Bündelung im großen Zahlraum zu behandeln (etwa mit Erbsen und Bohnen) und zu trainieren, um das dann auf den Rechenstrich oder halbschriftliche Verfahren zu übertragen. Oft gibt es Teilkompetenzen, die solches Vorgehen erlauben.

Die dritte Spalte zeigt, auf welchem Abstraktionsniveau die Rechenhandlung mit dem vorgeschlagenen Rechenmittel durchgeführt wird. Dies ist ein Aspekt, der aus meiner Sicht bisher viel zu wenig Beachtung gefunden hat. Er hilft, bewusster und zielgerichtet zu entscheiden, ob im Unterricht oder in der Förderung etwa mit Wendeplättchen (analog), Rechenrahmen/Rechenkette, Rechenschiff (analog geordnet), mit Zehnerstäben und Plättchen/Mehrsystemsblöcken (konkrete Bündelung), mit Geld/Erbsen und Bohnen (symbolische Bündelung) oder an der Stellenwerttafel/Rechenbrett (konkretes Stellenwertsystem) gearbeitet werden sollte. Das Rechenmittel hat einen deutlichen Einfluss auf die Rechenhandlung und erfordert jeweils unterschiedliche Voraussetzungen. Es knüpft an unterschiedliche innere Vorstellungen an und entwickelt diese auf unterschiedliche Weise. In jedem Fall zeigt der Gebrauch aber dem Beobachter etwas über das innere Zahlkonzept des Rechnenden.

Ein Blick in die vierte Spalte sollte deutlich machen, dass hier einige Veränderungen des herkömmlichen Lehrgangs angeregt werden.
Das beginnt mit den ‚elementaren Rechenaufgaben', die *alle vier Grundrechenarten* umfassen. Gerade im Anfangsunterricht spielen Multiplikation und Division eine wichtige Rolle, weil die in den Rechenhandlungen entstehenden Rechtecke sichtbar strukturierte Zahlen zeigen und der einseitigen Verfestigung von linearen Vorstellungen entgegenwirken. Da wir nicht von unseren Zahlen und von Zahlräumen ausgehen, sondern von Rechenhandlungen, ist es ein Leichtes auch Multiplikation und Division als Nachspielen von erfahrener Wirklichkeit zu interpretieren. (3x4 „Da sind drei Kinder (Kegel) und jeder bekommt 4 Würfel. Wie viel haben alle zusammen?" und 12:4 „Da sind 12 Würfel. Die werden an 4 Kinder gerecht verteilt. Wie viel bekommt jeder?) Diese Rechenhandlungen unterstützen das Kind darin, die sich bildenden Zahlen an seinen protoquantitativen Erfahrungen anzubinden und dieses vorschulische Wissen (Gerster 2000) zu nutzen.

Diese didaktische Orientierung an den Kernbotschaften setzt sich fort, wenn der Zerlegungs-aspekt vor allem im ganz kleinen (wahrnehmbaren) Zahlraum bis 5 abrufbar trainiert wird. Einmal weil er hier nicht zum abzählen verführt. Zweitens weil dieser Zahlraum ausreicht, um die Fünferstange als frühes Bündelungsobjekt einzuführen.
Eine Didaktik in der Logik wahrnehmungsgestützter Rechenhandlungen fordert den Fünfer, nicht den Zehner. (Um den Dezimalaspekt geht es aus Sicht der Rechenhandlungen noch gar nicht. Der kommt für einen Rechner im Zahlraum bis 20 gar nicht vor.) Der Zehnerübergang wird dadurch zunächst entbehrlich und nach hinten geschoben. Ernsthaft findet er seine Behandlung erst im Hunderterraum, wenn das periodische Zählen die Zehner-Einer-Gliederung erfahrbar werden lässt. (21,22,23, …29,30, 31, 32, 33, .. 39, 40, 41, 42, 43, ..)

Schließlich stehen von Anfang an die Übergänge zwischen den Wertebenen, also Bündelungs- und Enbündelungsprozesse, im Mittelpunkt. Anders als bei den üblichen Lehrgängen werden alle Analogieaufgaben aus den Anfangsphasen verbannt, um Verfestigungen des Rechnens mit Zehnern und Hundertern als Einern entgegenzuwirken. (Sie konnten oben ausprobieren, wie Wert oder gar das Verhältnis von Wertebenen beim Rechnen ausgeblendet bleiben kann.) Es geht nun vor allem um *reversible Wertebenen*, also um die Zusammenhänge zwischen den Ebenen! Daher müssen die Aufgaben diesen Aspekt thematisieren.

Zum Schluss bekommt der Aspekt des Stellenwerts durch das Rechnen am Rechenbrett eine eigene Aufmerksamkeit, aus der heraus die schriftlichen Verfahren, die ja auf dem positionsweisen Rechnen beruhen, verständig hervorwachsen können. Dabei ist wichtig, dass es erneut nicht darum geht, wie an der Stellenwerttafel, Zahlen zu legen, sondern mit Übergängen im Rahmen aller vier Grundrechenarten zu rechnen.

Erst auf dieser Grundlage, wenn alle diese Aspekte durchgearbeitet sind, kann man davon ausgehen, dass nahezu alle Kinder auch die schriftlichen Verfahren verständig benutzen können, ohne in ein Rechnen mit Ziffern zurück zu fallen.