Dollinger, B., & Schmidt-Semisch, H. (2011). *Handbuch Jugendkriminalität: Kriminologie und Sozialpädagogik im Dialog* (2., durchgesehene Auflage.). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
Dörpinghaus, A. (2012). *Einführung in die Theorie der Bildung. 4., durchges. Aufl.* Darmstadt: Wiss. Buchges.
Dörr, M., & Herz, B. (2010). *»Unkulturen« in Bildung und Erziehung* (1. Aufl.). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
Grüner, T., & Hilt, F. (2008). *Bei Stopp ist Schluss!: Werte und Regeln vermitteln ; Klasse 1–10* (9. Aufl.). Buxtehude: AOL-Verlag.
Hafeneger, B. (2013). *Beschimpfen, bloßstellen, erniedrigen: Beschämung in der Pädagogik* (1. Aufl.). Frankfurt am Main: Brandes & Apsel.
Hall, Stuart (1989). Rassismus als ideologischer Diskurs. *Das Argument*, (178).
Herz, B., & Zimmermann, D. (2014). Beziehung statt Erziehung? Psychoanalytische Perspektive auf pädagogische Herausforderungen in der Praxis mit emotional-sozial belasteten Heranwachsenden (im Erscheinen).
Hoffmann, I. (2011). Inklusion – auch für »böse« Jungs? *Zeitschrift für Inklusion*, *5*(1). Abgerufen von http://www.inklusion-online.net/index.php/inklusion-online/article/view/102
Ilien, A. (2008). *Lehrerprofession: Grundprobleme pädagogischen Handelns* (2., überarbeitete Auflage.). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
Ilien, A. (2009). *Grundwissen Lehrerberuf: eine kulturkritische Einführung* (1. Aufl.). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
Kant, I. (1974). *Über Pädagogik.* (H. Holstein, Hrsg.) (4. Aufl.). Bochum: Kamp.
Konflikt-Kultur (2013). *Stellungnahme der Leitung des Präventionsprogramms Konflikt-KULTUR zur Sendung des NDR »Panorama 3« vom 29. Oktober 2013.* Zugriff am 27.07.2014 http://www.konflikt-kultur.de/images/Download/Referenzen/Stellungnahme_AGJ.pdf
Marks, S. (2007). *Scham – die tabuisierte Emotion.* Düsseldorf: Patmos-Verlag der Schwabenverlag AG.
Reuter, J. (2002). *Ordnungen des Anderen: Zum Problem des Eigenen in der Soziologie des Fremden* (Auflage: 1., Aufl.). Bielefeld: transcript.
Schroedter, T. (2012). *Antiautoritäre Pädagogik: zur Geschichte und Wiederaneignung eines verfemten Begriffes* (2., erw. Aufl.). Stuttgart: Schmetterling Verlag.
Störmer, N. (2008). Das Problem, Menschen so zu verändern, dass sie das tun, was ich von ihnen will. *Behindertenpädagogik*, (1), 31–60.
Wacquant, L.J.D. (2009). *Bestrafen der Armen: zur neoliberalen Regierung der sozialen Unsicherheit.* Opladen [u.a.]: Budrich.
Würker, A. (2013). Scham und Gewalt in der Schule. Tiefenhermeneutische Überlegungen zum Thema School Shooting. In: Brunner, Markus & Lohl, Jan: Normalungetüme. School Shootings aus psychoanalytisch-sozialpsychologischer Perspektive. Gießen: Psychosozial-Verlag.
Zimmermann, D. (2012). Migration und Trauma: pädagogisches Verstehen und Handeln in der Arbeit mit jungen Flüchtlingen (Orig.-Ausg.). Gießen: Psychosozial-Verlag.

Anschrift des Verfassers:
Christoph Müller, B.A., B.A.
Minister-Stüve-Str. 10
30449 Hannover
E-Mail: christophz.mueller@gmail.com

Ein Mathematikunterricht für alle!

Schulische Inklusion braucht eine inklusive Fachdidaktik

Klaus Rödler

Schule heute ist ›inklusiv‹. »Alle gehören dazu«, heißt es. Und aus Sicht der politisch Verantwortlichen und der Schulaufsicht ist das Thema damit auch schon fast erledigt. Der schwarze Peter liegt bei den Schulen, genauer bei den Lehrkräften, die in einem strukturell gleich bleibenden Gesamtsystem ohne konzeptionelle Vorgaben und ohne entsprechende Unterstützungssysteme das verwirklichen sollen, was als gesellschaftliche Anforderung im Raum steht.

In der klassischen Reformpädagogik finden sich Beispiele für Schulen und Unterrichtskonzepte, die gleichermaßen auf das Individuum wie auf die Gemeinschaft ausgerichtet waren. (z.B. Hamburger Gemeinschaftsschule, Jenaplanschule, Freinets Pädagogik) In den heutigen Grundschulen findet man viele, die ihr Klassenleben in den letzten 30 Jahren im Blick auf solche Grundgedanken hin verändert haben. Die Erweiterung des rein auf Vermittlung gerichteten Unterrichts um Gespräch, Spiel, selbsttätige Arbeit und Feier (Bei Petersen die vier Grundsäulen der Bildung.) hin zu einem vielfältigen Klassenleben kann heute an vielen Orten beobachtet werden. Oft geschieht das unter den räumlich unzureichenden Bedingungen eines Klassenraumes, der gerade nicht auf ein vielfältiges Leben ausgerichtet ist. Ganz selten gibt es die Situation, dass die pädagogisch anspruchsvolle Arbeit eines sich wirklich an den einzelnen Kindern und der Kindergruppe orientierenden Schullebens durch echte Teams, durch Supervision und gemeinsame Reflexion befruchtet und unterstützt wird. Solch ein Rahmen ist die Voraussetzung, um über das Pädagogische hinaus zu einer inklusiven Didaktik vorzudringen.

Was heißt eine *›Inklusive Didaktik?‹* Sicher erschöpft sie sich nicht in einer immer genaueren Differenzierung der Stufen des Lehrgangs und einer immer feineren Individualisierung des Unterrichts. Nach meiner Überzeugung muss *›Inklusive Didaktik‹* folgende Grundbedingungen erfüllen:

Sie ist eine ›flüssige Didaktik‹.
Eine flüssige Didaktik beschäftigt sich weniger damit, mit welchen Kunstgriffen alle Kinder auf einem bestimmten Lernweg mitgenommen werden können. Sie sucht vielmehr den Weg und ist dabei offen, selbst die Ziele des Weges immer

wieder neu zu bestimmen. Es ist eine Didaktik, die die Lehrerhandlung immer als Hypothese versteht. Unterricht ist immer ein Versuch, der in seinen Wirkungen beobachtet und reflektiert werden muss. Neugierig muss der Lehrer sein. Neugierig und bereit, seinen Ansatz angesichts dessen, was er bei den Kindern sieht, zu verändern und anzupassen. Dies ist nur möglich, wenn eine pädagogisch sensiblen Grundhaltung durch fundierte Fachkompetenz gestützt ist, die es erlaubt, Alternativen zu denken.

Sie ist eine ›Didaktik der Komplexität‹.
Nicht ›vom Einfachen zum Schweren‹ soll der Weg gehen, sondern vom keimhaft Bewussten zum voll Verstandenen. ›Gestuftes Verständnis‹ statt ›gestufte Schwierigkeit‹.

Die Schule, die wir kennen, stuft den Lehrgang nach Schwierigkeiten. (Beim Rechnen Lernen: Erst im Zahlraum bis 10, dann bis 20, dann bis 100, dann bis 1000, dann bis 1 Million. Oder: Erst Plus, dann Minus, dann Mal und dann Geteilt.)

Erst wenn das Leichte verstanden ist, kommt das nächst Schwerere. In kleinen Stufen. Und für leistungsschwache Kinder in ganz kleinen. So gerät das Lernen zu einem unendlichen Treppenlauf, der nach jedem Erfolg eine neue Kränkung bereit hält. Denn obwohl er im einen Moment suggeriert, man könne jetzt etwas und habe etwas gelernt, zeigt er im nächsten Schritt, dass man nichts kann und wieder von Neuem anfangen muss. Schule hat dadurch etwas Sisyphos-haftes.

Statt die komplexe Wirklichkeit in kleine aufbauende Schwierigkeitsstufen zu zerhacken, was die Lerngruppe notwendig in Leistungsgruppen trennt, die auf verschiedenen Stufen arbeiten, muss gerade auch unter der Forderung nach Inklusion heißen, die Wirklichkeit in ihrer ganzen Komplexität in den Mittelpunkt zu stellen. Nur komplexe Anforderungen schaffen eine ausreichende Breite potenzieller Erfahrungsmöglichkeiten, die unterschiedlichen Lernern angemessene Zugänge eröffnen. Nur bei hinreichender Komplexität werden die unterschiedlichen Zugriffsmöglichkeiten zusammengeführt. Nur so erhält man einen ›Gemeinsamen Gegenstand‹.

In dieser Arbeit mit einer komplexen Wirklichkeit führt der Weg nicht mehr ›vom Einfachen zum Schweren‹, sondern ›vom anfänglich Verstandenen zum völlig Durchdrungenen‹. Es entsteht ein Verstehens*prozess*, ein gestuftes Verstehen statt ein Verständnis auf gestuftem Schwierigkeitsniveau.

Sie ist eine ›Mathetik‹, also eine Didaktik, die das gesamte pädagogische Feld mit einbezieht.
Den Begriff der ›Mathetik‹ hat Hartmut von Hentig verwendet, um den Ansatz der Freien Schule Frankfurt fassbar zu machen. Diese Schule habe weniger eine Didaktik, eine Lehre vom gelungenen Lehren, als eine Mathetik, also eine Lehrer vom gelungenen Lernen. (v. HENTIG 1985) Wie in der Montessori-Pädagogik oder in anderen reformpädagogischen Ansätzen wird das Kind in einer Lernumwelt hineingestellt, in der es sich die notwendigen Dinge aneignet.

Inklusion in der Regelschule fordert eine ähnliche Veränderung des Unterrichts. Da sich Inklusion vor allem auch auf das soziale Miteinander bezieht, da überhaupt nur von gelungener Inklusion gesprochen werden kann, wenn die Kinder mit Förderbedarf wirklich ein Teil der Gruppe sind und in vergleichbaren sozialen Beziehungen stehen, ist an den Unterricht und das Klassenleben die Anforderung zu stellen, diese Verbindungsprozesse zu unterstützen.

Mit den Worten ›Gespräch, Spiel, Arbeit, Feier‹ hat Petersen das Aufgabenfeld erweitert. An den Hamburger Gemeinschaftsschulen der 20er Jahre kann man erkennen, wie fruchtbar es ist, wenn die Eltern in das Schulleben hinein gezogen werden. Im Blick auf die Frage ›Inklusion und Mathematik‹ muss also auch dieser Aspekt beachtet werden.

Kommen wir also zu den fachdidaktischen Konsequenzen dieser pädagogischen und allgemeindidaktischen Rahmensetzungen, die aus dem Wunsch nach einer inklusiven Schule erwachsen.

Fachdidaktische Konsequenzen

1. Wir brauchen Begriffe, die nicht ausschließen, sondern alle mitnehmen.

Der vertraute Lehrgang koppelt das Rechnen an die Beherrschung unserer Zahlen. Er geht von der Zahlwortreihe aus und versucht diese ›bekannten‹ Zahlen mit Mengenvorstellungen zu unterlegen.

Die Kinder sollen verstehen, was »Drei« und »Vier«, bzw. ›3‹ und ›4‹ bedeuten. Entsprechend beginnt der Unterricht damit, Zahlen Mengen zuzuordnen und Mengen Zahlen. Auf dieser Grundlage werden die Zahlen geordnet, geschrieben und werden Nachbarzahlen bestimmt. Und wenn man glaubt, dass die Zahlen in einem gewissen Zahlraum hinreichend vertraut sind, wird gerechnet. Erst Plus. Dann Minus. Zunächst noch mit Anschauungshilfen. (Perlenkette, Rechenrahmen, Zwanzigerfeld, Rechenschiffchen, Steckwürfel, usw.) Und dann ohne.

Dieses Vorgehen zerreist von Anfang an die Kindergruppe!

Es grenzt all jene aus, die keine Chance haben, die Zahlwortreihe zu lernen. Es grenzt all jene aus, die zwar die Zahlwortreihe im kleinen Zahlraum aufsagen können, aber Schwierigkeiten bei der Symbolisierung in Zahlzeichen haben. Und es trennt die Rechner in jene ›guten Rechner‹, die schon das *›eigentliche Rechnen‹* (im Kopf) beherrschen und jene ›schwachen Rechner‹, die noch *›auf Anschauung angewiesen‹* sind.

Ursache für diesen grundlegenden Widerspruch zum Anspruch auf Inklusion ist die zugrunde gelegte und nicht hinterfragte Definition der Begriffe ›Rechnen‹ und ›Zahl‹.

Indem ›Rechnen‹ als ein abstraktes Operieren mit unseren Zahlen verstanden wird, und indem der Begriff ›Zahl‹ mit unseren abstrakten Stellenwert-

zahlen identifiziert wird, ist der Keim für diese ausgrenzenden Konsequenzen gelegt.

Wir brauchen eine Veränderung in der Definition, wenn wir alle mitnehmen wollen. Wir brauchen eine Definition des Rechnens, das dieses zu einer allgemein menschlichen Fähigkeit erhebt und eine Definition der Zahl, die den verständigen Zugriff nicht von einer entwickelten Symbolisierungsfähigkeit abhängig macht.

Ein Blick in die Kulturgeschichte der Zahlen und des Rechnens hilft uns zu erkennen, in welche Richtung wir denken müssen.

Bleiben wir bei der Vorstellung, dass ›richtiges Rechnen‹ ein (im Kopf durchgeführtes oder in Zahlen notiertes) Rechnen mit abstrakten Zahlen ist, so haben die Buchhalter und Kaufleute vergangener Jahrhunderte und Jahrtausende gar nicht gerechnet. Sie sind mit ihrem Abakus, dem Fingerrechnen, dem Rechnen auf Linien und am Rechenbrett ja nie über die Stufe der veranschaulichten Rechnung hinaus gekommen.

Erst seit etwa 500 Jahren rechnet ein Teil der Menschheit so wie wir es kennen. Und sogar noch vor 100 Jahren war der Abakus in vielen Ländern ein übliches Rechenmittel. Ganz offensichtlich war Rechnen für Jahrtausende ein Handlungsvorgang.

Wenn wir also einen umfassenden, einen inklusiven Begriff des Rechnens haben wollen, so dürfen wir diese kulturellen Stufen nicht ausgrenzen und sollten uns diesen die Kulturgeschichte Ernst nehmenden Begriff als Grundlage nehmen:

Rechnen ist ein Handlungsvorgang,
bei dem Größen- oder Anzahlprobleme gelöst werden.

Mit dieser Definition bin ich ein Stück weit über das handelnde Rechnen der Buchhalter und Kaufleute hinausgegangen. Deren Rechnen war nämlich immer an ein Rechenmittel gebunden. Die Wirklichkeit war schon in eine konkrete Zahl verwandelt, mit der dann stellvertretend operiert wurde.

Indem ich den Handlungsvorgang nicht an eine solche vorherige Verwandlung in Zahl koppele, schließe ich jene Denk- und Lösungsprozesse ein, die sich auf der Ebene der Wirklichkeit bewegen.

Wenn ein Säugling den Kopf zur größeren Anzahl hin dreht und damit im Experiment zeigt, dass er auf dieser Stufe über eine protoquantitative Auffassung der Wirklichkeit verfügt (DEHAENE 1999, S. 54 ff.), so löst er ein für ihn relevantes Anzahlproblem. Indem diese Stufe des *›Rechnen auf der Ebene der Wirklichkeit‹* mit in den Begriff des Rechnens hinein genommen wird, haben wir eine umfassende Definition, die es uns erlaubt, alle Kinder in unseren Rechenunterricht mit hinein zu nehmen.

Gehen wir auf die Ebene der Zahlbildung, so zeigt sich das gleiche Grundproblem. Wer Zahlen mit unseren Zahlen identifiziert, schließt alle früheren Kulturstufen vom Rechnen aus. Er wird blind für die Stufen, in denen sich Zahlen über die Jahrtausende verändert haben. Und insbesondere übersieht er die Tatsache

der Existenz ›konkreter Zahlen‹, die bei frühen Formen der Buchhaltung und des Rechnens eine große Bedeutung gespielt haben.

Was ist eigentlich eine Zahl? »Drei« und »Vier«, das sind ja nur Worte. ›3‹ und ›4‹, das sind ja nur Zeichen. Wodurch und in welchem Sinne werden sie zu Zahlen?

Schauen wir uns Zahlbildungen auf der frühesten Kulturstufe an, so können wir erkennen, was eine Zahl ausmacht. ›Steinzeit-Zahlen‹ wie III oder IIII bilden eine kardinale Wirklichkeit ab. Zahlen entstehen zu Beginn der Menschheitsgeschichte zunächst in Form einer *›analogen Abbildung‹*.

Zahlen sind Abbildungen einer kardinalen Wirklichkeit.
Sie entstehen in einem Zählprozess.

Auch unsere Zahlen entstehen aus einer Abbildung. Wenn wir die Zahl der Kinder in der Klasse bestimmen wollen, dann zählen wir. Dazu bilden wir die Kinder in die Zahlwortreihe hinein ab. So finden wir diejenige Zahl, die die Gesamtzahl der Kinder benennt. (Genauer: das Zahl*wort*!)

Nichts anderes hätte ein steinzeitlicher Hirte gemacht. Nur hätte er, in Ermangelung einer Zahlwortreihe, vielleicht Muscheln als Zählmaterial genommen und für jedes Kind eine Muschel gelegt. Auch er führt eine Abbildung durch. (Wenn auch in ein Zählmaterial.) Auch bei ihm entsteht auf diese Weise die Zahl. (Wenn auch als konkrete, materiell vorhandene und deshalb nicht auf ein Zahlwort angewiesene Zahl.)

Oder er hätte eine Strichliste gemacht. Und auch diese hätte am Ende zu einer Zahl geführt, die ihren Wert (hier als Zahlzeichen) in sich trägt und sichtbar macht, die deshalb nicht auf ein Zahlwort angewiesen ist. »So viele.« Das reicht, um diese konkrete Zahl zu benennen.

Zahlen waren zunächst konkrete Zahlen. Zahlworte und Zahlsymbole entwickelten sich erst nachfolgend. Unter dem Bedürfnis, immer größere Anzahlen spontan erkennbar zu machen und in Rechenhandlungen zu bewegen, stieg dabei das Niveau der Verschlüsselung. Zusammenfassungen von Einzelelementen durch Muster oder Bündelungsobjekte wurden genutzt. Wertebenen entstanden, sowohl auf der materiellen Ebene wie auf der der Zahlzeichen. Und schließlich begann man, die unterschiedlichen Wertebenen nicht mehr durch unterschiedliche Gegenstände und Zahlsymbole darzustellen, sondern insbesondere im Rechenvorgang durch eine unterschiedliche Platzierung am Rechenmittel (Abakus, Rechenbrett, Linien). Erst auf der Grundlage eines Jahrhunderte langen Rechnens mit Rechenmitteln, die nach Stellenwerten aufgebaut waren, wuchs langsam gesamtkulturell die Fähigkeit, sich auch in den Zahlen selbst und dann auch in den Rechenvorgängen vom Wertsymbol zu lösen und zu einem Rechnen mit Stellenwertzahlen überzugehen.

Zahlen können auf unterschiedlichem Abstraktionsniveau gebildet werden.
Diese Stufen sind:

- Analoge Abbildung
- Konkrete Bündelung
- Symbolische Bündelung
- Konkretes Stellenwertsystem
- Abstraktes Stellenwertsystem

Die Langwierigkeit dieses kulturellen Prozesses der Zahlbildung, in dem das Abstraktionsniveau der Zahlen allmählich wächst, macht deutlich, dass hier Verständnishürden versteckt sind, die überwunden werden müssen. Das Abstraktionsniveau des Denkvorgangs muss *allmählich* wachsen. Was menschheitsgeschichtlich mehr als 10.000 Jahre gedauert hat, ist kein Prozess der ersten zwei Schuljahre.

Zahlen und Rechenvorgänge haben sich historisch auf einem ansteigenden Abstraktionsniveau entwickelt. Diese Stufen sind auch didaktisch zu beachten und didaktisch zu nutzen.

2. Mathematisierung von Wirklichkeit

a. Konkrete Zahlen

Die Wirklichkeit ist immer komplex. Aber das heißt nicht, dass die Mathematisierung dieser Wirklichkeit kompliziert sein muss. Zumindest dann nicht, wenn man darauf achtet, dass das Abstraktionsniveau niedrig bleibt. Das Niveau der *›analogen Abbildung‹* erlaubt es, vielfältigste Fragestellungen im quantitativen Bereich so anschaulich zu bearbeiten, dass jeder in die Bearbeitung eingeschlossen bleibt. Gleichzeitig sorgt die eben nicht triviale Thematik dafür, dass der Inhalt auch für weit fortgeschrittene Lerner anspruchsvoll bleibt. (Siehe: RÖDLER 2012)

Wie viele Kinder sind auf der Schule? Gibt es mehr Mädchen oder Jungen? Sind auf den Klassenstufen gleich viele Kinder? Was sind die Lieblingsfarben der Kinder in der Klasse/in der Schule?

Welche Automarken gibt es? Welche sind die häufigsten? Was ist die Lieblingsfarbe der Autofahrer?

Wer kann in der Klasse im Hof in 2 Minuten am Häufigsten hin und her laufen? Wessen Auto rollt am weitesten? (Bei wem kann man die meisten Lineale hintereinander legen?) Wer muss die meisten Treppenstufen zu seiner Wohnung laufen?

Kommen beim Würfel bestimmte Zahlen häufiger? Welche Farben sind in den Socken versteckt? (Oder: Welche Farben werden wie oft gezogen? Welche Vermutung leiten wir daraus ab?) (Siehe: RÖDLER 2006)

Alle diese Fragen verlangen nach der Feststellung einer Anzahl. Wobei die zu jeweils ermittelnden Zahlen den verständig erfassbaren Zahlraum eines Rechenanfängers im Allgemeinen überschreiten. Zählen wir aber nicht in der abstrakten Zahlwortreihe, sondern bilden wir durch den Prozess der analogen Abbildung (Ein Ereignis – Ein

Holzwürfel!) eine konkrete, gegenständlich vorhandene Zahl, so wie es ein steinzeitlicher Hirte getan hätte, so haben wir die kardinale Wirklichkeit der Fragestellung direkt vor uns liegen. Das Problem besteht alleine darin, diese als Holzwürfelhaufen sichtbare konkrete Zahl für die Wahrnehmung erfassbar zu machen. Wir wollen sie erkennen können, *ohne* die unmittelbare kardinale Einsicht durch ein Zahlwort zu ersetzen, dass im Aufsagen der Zahlwortreihe entstanden für den Anfänger inhaltsleer bleibt.

Das Problem besteht darin, dass die Wahrnehmung nur im Zahlraum bis Vier auf diese Ersatzhandlung verzichten kann. Im Zahlraum bis Vier greift die ›protoquantitative Wahrnehmung‹: Dass drei Elemente anders aussehen als vier und dass sie als weniger erscheinen, ist nicht auf einen Zählprozess angewiesen. Es braucht keine Zahlworte, um feststellen zu können, dass *so* viel weniger ist als *so* viel.

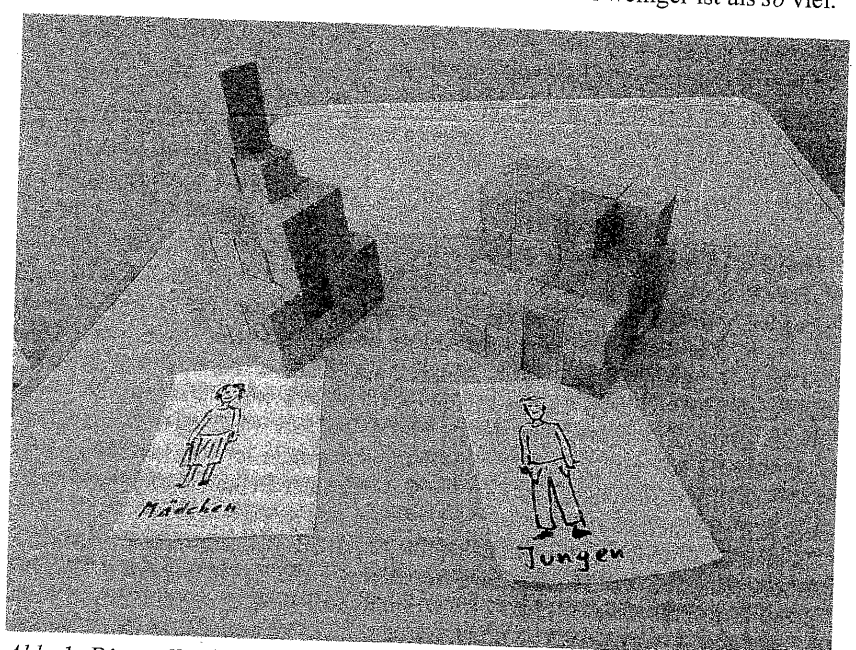

Abb. 1: Diese allgemein menschliche und schon bei Säuglingen nachzuweisende Kompetenz der ›protoquantitativen Wahrnehmung‹ (Vergl. Gerster/Schultz 2006) gilt es zu nutzen. Achten wir bei der Ordnung großer Anzahlen darauf, diese in einer Form zu ordnen, die nie mehr als vier Elemente in einer Reihe stellt, so wird der direkte Vergleich möglich.

Konkrete Zahlen brauchen zur Verständigung keine Zahlworte. Sie zeigen ihren Wert. So wie die ältesten Zahl*zeichen* auf dieser Abstraktionsstufe, Kerben in Wolfsknochen, ebenfalls ihren kardinalen Gehalt sichtbar machten.

Beispiel III: Das einzige Zahlwort, das man brauchte, hieß: ›*So* viele!‹.

Aus diesem Grund ist dieses Ausgangsniveau so geeignet für einen inklusiven Mathematikunterricht. Es schließt niemanden aus und jeden ein. Nicht nur kann der Zählprozess selbst (die analoge Abbildung in das Würfelmaterial) von allen Kindern der Gruppe verständig durchgeführt werden. Es können auch die so entstandenen Zahlen gemeinsam interpretiert werden, da die protoquantitative Anschauung dafür reicht. Alle sehen, dass es im abgebildeten Beispiel mehr Mädchen als Jungen gibt. Und das, obwohl hier Zahlen aus dem Hunderterraum verglichen werden. Mehr noch: Da sich die Antwort protoquantitativ finden lässt, verlangt die Lösung nicht nach der Verwandlung in unsere abstrakten Zahlen. (Was nicht ausschließt, dass ein fortgeschrittenes Kind diese Frage nach der genauen Anzahl stellt und die Antwort natürlich ermitteln kann.)

b. Die Sprache der Mathematik

·· sieht anders aus als ··· und ··· sieht anders aus als ····. So wie wir zu einem ›Glas‹ nicht »Tasse« sagen, weil es anders aussieht, so geben wir ·· einen anderen Namen als ··· oder als ····. Wenn wir die sichtbaren kardinalen Unterschiede im protoquantitativen Bereich benennen wollen, brauchen wir Worte. Diese Worte heißen: »Null, Eins, Zwei, Drei, Vier«. Die Zeichen dafür sehen so aus: 0, 1, 2, 3, 4.

»Drei« ist keine Zahl, sondern ein Wort. Genauso wie »Tasse« ein Wort ist und keine Tasse. Kinder, die unseren Zahlen über das Erlernen der Zahlwortreihe begegnen, glauben, dass sich in diesen Worten und in dieser Wortreihe die Zahlen verbergen. Auf dieser Grundlage versuchen sie die mysteriöse Wirklichkeit des Rechnens zu entschlüsseln. Kein Wunder, dass sich da manche in Wortreihen verlieren, weil sie in den Worten keinen Inhalt erkennen und zwischen den Worten keinen Zusammenhang als die Wortfolge. Wer weiß, dass die »Sieben« nach »Sechs« und vor »Acht« kommt, aber dabei kein inneres kardinales Bild der Sechs, Sieben oder Acht hat, der kann zwar zählend eine Lösung finden aber nicht in Strukturen rechnen.

Daher ist es ganz wichtig und auch für die ›guten‹ Anfangsrechner fruchtbar, die Vorstellung aufzulösen, die Zahl entstünde aus der Zahlwortreihe. Die Zahlwortreihe hilft den Namen einer Zahl zu finden. Aber sie erzeugt nicht die Zahl. Die Zahl muss als konkrete Wirklichkeit schon vorhandenen sein, um in Worte und Zeichen verwandelt zu werden. Das Zahlwort folgt der konkreten Zahl. Und das Zahlzeichen folgt mit einer weiteren Verzögerung. Beides entsteht aus dem Bedürfnis, über die im Leben bedeutsam gewordenen Zahlen kommunizieren zu wollen. Neben den konkreten Rechenhandlungen (siehe unten 2c) ist das Vergleichen, Nachbauen und Beschreiben von als Würfelgebäude gebildeten konkreten Zahlen ein guter Anlass, diesen wichtigen Entwicklungsschritt zu fördern.

Diese natürlichen umgangssprachlichen Sätze lassen sich schreiben. Und zwar in einer Schrift, die mit wenigen Zeichen auskommt, nämlich den Zahlzeichen 0, 1, 2, 3, 4 und den Operationszeichen + und ·.

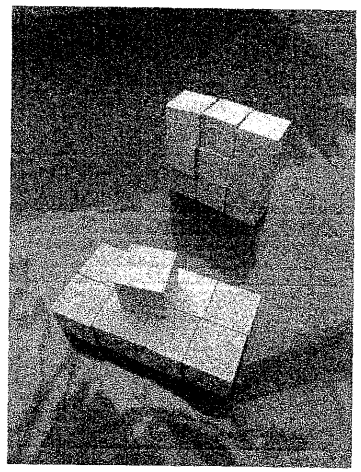

Abb. 2: Bei dem hinteren Gebäude sieht man lauter Dreier. Es sind drei Dreier, die das Gebäude bauen. Fasst man die Bauanleitung in Worte, so sind es entweder »Drei und Drei und Drei« oder »Dreimal Drei«. Das vordere Gebäude kann entsprechend als »Zweimal Vier und Eins« beschrieben werden.

›2 · 4+1‹ ist daher keine Rechenaufgabe, sondern eine geschriebene Gebäudebeschreibung. Es ist ein in der Sprache der Mathematik geschriebener Satz. Dass es sich hier um Sätze handelt, zeigt sich daran, dass sie von den Kindern gelesen und in Wirklichkeit wieder zurück übersetzt werden können. Eine Übung besteht darin, Terme wie ›2 · 4+1‹ oder ›4+2 · 3+1‹ an der Tafel entstehen zu lassen, während die Kinder gleichzeitig den geschriebenen Bauauftrag in ein wirkliches Gebäude übersetzen. Auch das ist eine Arbeit, die Kinder beim gemeinsamen Tun zusammenbringt und nicht aufgrund von Vorwissen trennt.

c. Rechenhandlungen mit konkreten Zahlen

Bewegen wir uns auf der niedrigsten Stufe der Zahlbildung, der ›analogen Abbildung‹, so zeigt sich deutlich, dass es nicht das als Operation verstandene Rechnen ist, das Verständnisschwierigkeiten macht. Es ist das dem tatsächlichen Verständnis unangemessene Niveau der Symbolisierung. Auf der Stufe der ›analogen Abbildung‹ lassen sich schon mit absoluten Rechenanfängern in der ersten Schulwoche Divisionen berechnen. Denn der Vorgang des Teilens ist ja ein Stück Lebenserfahrung des Kindes, die hier nur analog nachgespielt wird.

Multiplikation und Division sind auch deshalb zum Einstieg besonders geeignet, weil sie das Konzept des Rechnens als eines Vorwärts- und Rückwärtslaufens in der Zahlwortreihe durchbrechen. Sie fordern auch vom kompetenten Zähler eine Übersetzung ins Rechenmittel. Rechenhandlungen sind damit kein diskriminierendes Kennzeichen schwacher Rechner.

Da *alle (!)* Kinder auf diese analoge Nachbildung der Operation angewiesen sind, entsteht auch hier die gemeinsame Situation. Während der eine eher den Vorgang zu verstehen versucht und sich Zahlzeichen aneignet hat der andere hier die Möglichkeit Bausteine (hier: Vier) zu automatisieren und strukturelle Zusammenhänge wie den von Multiplikation und Division als Operation und Gegenoperation zu erfahren. Es ist die Vielschichtigkeit des Geschehens, die diese unterschiedlichen Zugriffe im gemeinsamen Lernprozess erlaubt.

Von Anfang an stehen alle vier Grundrechenarten im Fokus. Was sich über die Jahre verändert, ist weniger die Rechnung als das Abstraktionsniveau der

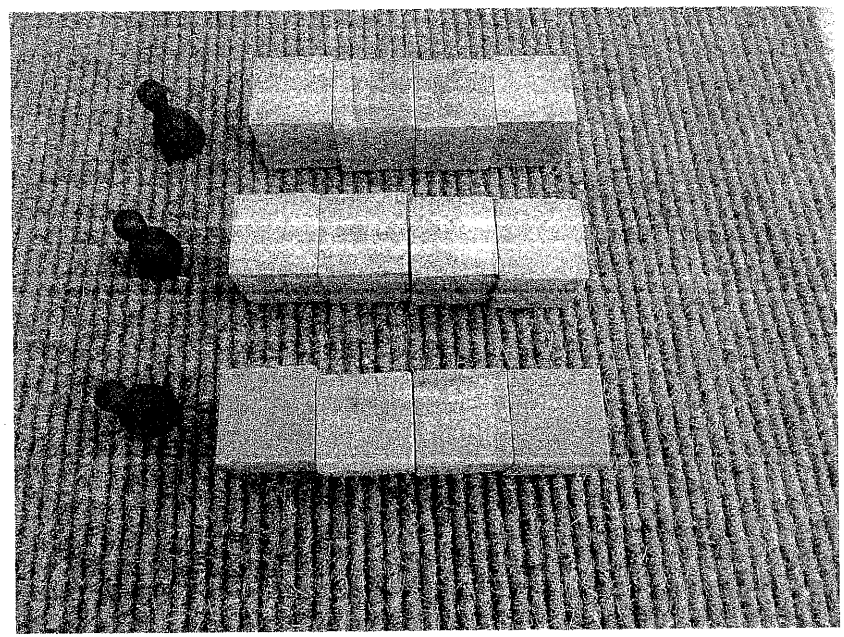

Abb. 3: So fordert die Aufgabe ›12 : 3=‹ als Handlung, dass man 12 Würfel an 3 Kinder (Halmakegel) verteilt. (Siehe RÖDLER 2012, 2013)
Das Problem von nicht bekannten Zahlzeichen lässt sich dabei über eine Zahl-Würfel-Tabelle lösen. (Siehe RÖDLER 2013, S. 43)

Rechnung. So erlaubt es der Einsatz von konkreten Bündelungen in Form von Fünferstangen schon früh in die Addition und Subtraktion im Zahlraum bis 20 einzusteigen beim Einstig in den Hunderterraum das Konzept des reversiblen Zehners durch seine Materialisierung als Zehnerstange zu durchdringen. (Zur Bedeutung von konkreten und symbolischen Bündelungsobjekten zum Aufbau des Konzepts reversibler Wertebenen, siehe: RÖDLER 2005, 2010, 2013)

Der Übergang in den großen Zahlraum macht es notwendig, bei der Rechenhandlung auf die Stufe der ›symbolischen Bündelung‹ überzugehen. Einer, Zehner, Hunderter und Tausender werden wie zu Zeiten der Sumerer gegenständlich in die Hand genommen. Die Handlungsvorgänge der vier Grundrechenarten sind dabei die bereits von niedrigeren Abstraktionsstufen vertrauten. Addition heißt Zusammenführen und Subtraktion heißt Auseinanderziehen. Die Multiplikation führt gleich große Teile zusammen, während die Division als Verteilprozess, ganz wie in der ersten Schulwoche, gleich große Teile durch einen Verteilprozess sichtbar macht. In der Rechenhandlung selbst gibt es keine Neuerung. Die Handlungsvorgänge bleiben gleich. Was sich ändert ist

das Abstraktionsniveau der konkreten Zahlen, mit denen die Rechenhandlung ausgeführt wird.

Und wieder zeigt sich das inklusive Moment dieses handelnden Rechnens. Denn die auf der Abstraktionsstufe ›symbolische Bündelung‹ durchgeführte Rechenhandlung erlaubt es sogar noch zählenden Rechnern, Rechnungen im Zahlraum bis 10.000 durchzuführen. Gute und schwächere Rechner machen gemeinsam den Schritt in diese neue Erfahrungswelt. Gute und schwächere Rechner führen die gleichen Rechenhandlungen durch und lösen die gleichen Aufgaben. Während aber die schwächeren mit diesen Erfahrungen ihren Blick auf die Bedeutung des Zehners stärken, um vielleicht an diesem Punkt das Rechnen hin zur Zehn zu trainieren, die Zerlegungen bis zur Zehn zu automatisieren und die Schreibweise großer Zahlen kennen lernen, profitieren die Starken dadurch, dass sie die Grundidee unseres auf dezimaler Bündelung beruhenden Zahlsystems als eines immer weiter treibenden Grundprinzips verstehen, aus der heraus unser Stellenwertsystem entstanden ist. Die Idee des ›Immer weiter‹ machte es notwendig, sich vom Prinzip immer neuer Wertsymbole zu lösen und eine rein strukturelle Form der Zahldarstellung zu finden. Außerdem führt die Übersetzung und Beschreibung von Handlungsvorgängen in vorgestellte Rechnungen dazu, dass schriftliche Notationen an Bedeutung gewinnen und mit diesen eine neue Stufe des Rechenvorgangs erreicht wird. Auch hier wird deutlich, was oben mit dem Begriff ›flüssige Didaktik‹ gemeint war und wie diese erst durch ein Mindestmaß an Komplexität wirksam werden kann.

d. Projekte im 1. Schuljahr

Um einen kleinen Einblick zu geben, wie komplexe Mathematik schon im Anfangsprozess und weitgehend unabhängig von Kompetenzen zur Symbolisierung und dem Verständnis größerer Zahlworte verwirklicht werden kann, möchte ich drei Projekte des ersten Schuljahres in ihren Grundzügen andeuten.

Der Schultagezähler
Der Schultagezähler zeigt, wie viele Tage wir in der Schule sind. (Beschreibung und Bauanleitung in: RÖDLER 2013) Dazu wird auf einer Leiste an jedem Schultag ein Würfel hinzugefügt und die jeweilige Zahl geschrieben. Die konkrete Zahl und die geschriebene Zahl ergänzen sich.

Wenn die Zahl der Würfel unanschaulich wird, werden zunächst Fünferstangen und später Zehnerstangen eingeführt. Am hundertsten Tag ist die Leiste voll und die zehn Zehner werden durch eine Hunderterstange ersetzt. Dann geht es wieder von vorne los. So wächst die konkrete Zahl im ersten Schuljahr täglich weit in den zweiten Hunderterbereich hinein und bietet einen regelmäßigen Gesprächsanlass. (Zum Beispiel am 140. Tag: »Wo sehen wir die ›1‹«? – Das ist die Hunderterstange. Die ›1‹ ist gar keine ›Eins‹ sondern eine ›Einhundert‹! »Wo sehen wir die ›4‹?« – Das sind die ›vierzig‹ Würfel, die sich in den vier Zehnerstangen verstecken.

Die ›4‹ ist eine ›Vierzig‹! »Und wo sehen wir die ›0‹?« – Das sagt, dass da keine einzelnen Würfel liegen. Eigentlich heißt die Zahl ›Einhundertnullundvierzig‹! Nur sagen wir das nicht.)

Black socks (Siehe: RÖDLER 2006)
In die Klasse habe ich einige alte Socken mitgebracht, in denen sich vier oder fünf Würfel in zwei oder drei Farben befinden. Die Aufgabe besteht darin, herauszubekommen, wie viele Würfel welcher Farbe darin sind. Man darf aber immer nur einen Würfel heraus ziehen und muss ihn wieder hinein tun, bevor man den nächsten zieht. So entstehen in Würfelhaufen oder Strichlisten konkrete Darstellungen der Häufigkeiten.

Black Socks

Beispiel: 4 Würfel
- ➢ Gezogen wurden:
- ➢ Rot: IIIIIIIIIIIIII
- ➢ Grün: IIIIIIIIIII
- ➢ Blau: IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII

Die Vermutung, dass es mehr blaue als rote und grüne Würfel geben muss liegt auch für den nahe, der die Zahlen 14, 17 und 30 noch nicht kennt und nicht inhaltlich bewerten kann. Es reicht die ›protoquantitative Anschauung‹, um eine begründete Meinung zu vertreten. (Zum Projekt, siehe auch: RÖDLER 2006)

Werden aus größeren Babys größere Kinder?
Diese Frage warf sich in einer ersten Klasse auf, in der früh das Thema Sexualität und Kinderkriegen zur Sprache kam. Warum sind die Kinder in der Klasse nur so unterschiedlich groß?

Für die Antwort brachten die Kinder ihre Mutterpässe mit. Aus diesen entnahmen wir ihre Geburtsgröße. Die Zahl suchten wir am Zollstock, um dann einen Papierstreifen von der entsprechenden Länge zu schneiden. So bekamen wir eine *›analoge Abbildung‹* der Babygrößen. Diese mit Namen versehenen Streifen wurden der Größe nach geordnet (protoquantitative Wahrnehmung reicht. Alle machen mit!) Dann stellten sich die Kinder in der gleichen Reihenfolge auf. Und es zeigte sich: Die Annahme, dass aus kleinen Babys kleine Kinder werden und aus großen Babys große Kinder, war falsch. Die Ordnung zeigte kaum einen Zusammenhang.

Training und Automatisierung

Neben dem Aufbau eines verständigen Umgangs mit Zahlen und Rechenvorgängen spielt im Bereich des Rechnen Lernens auch der Aspekt der Automatisierung

eine große Rolle. Im Bereich der Addition und Subtraktion sollte es ebenso wie im Bereich der Multiplikation und Division einen wachsenden Bestand automatisierten Ergebniswissens geben. Solch ein Bestand an gewussten Ergebnissen ist die Grundlage dafür, mehrschrittige Rechnungen sicher vollziehen zu können.

Der Grad der Automatisierung ist in einer heterogenen Klasse notwendig breit gestreut. Hier besteht also auf den ersten Blick die Gefahr, dass dieser wichtige Teil des Unterrichts das Geschehen zerreißt. Das Risiko ist jedoch kleiner als gedacht.

Weil Automatisierung immer weiter steigerungsfähig ist, bietet sie im Gegenteil die Chance, das Einfache und Elementare immer wieder in den Blick zu nehmen, das für die schwächeren Rechner von großer Bedeutung ist. Es macht durchaus Sinn, nicht nur im ersten Schuljahr wiederholt die Zerlegungen bis 10 und die einfachen Rechnungen in diesem Zahlraum zu trainieren. Auch in den höheren Klassen sollte immer wieder in diesem elementaren Zahlraum gearbeitet werden. Selbst Fünftklässler scheitern nach meiner Erfahrung teilweise noch an einem fehlenden Zerlegungswissen.

Dieses wiederholte Training des elementaren Aufgabenbereichs schafft allen Kindern Erfolgserlebnisse. Gerade weil es ›einfach‹ ist und weil sie dabei ihren Fortschritt erleben können. Der Fortschritt wird für sie in der wachsenden Sicherheit und im wachsenden Arbeitstempo sichtbar. Gleichbleibende Tests zeigen jedem Kind seine Bewegung. Dem Besten wie dem Schwächsten. Und sie lassen die Guten wie die Schwachen am gleichen Inhalt arbeiten. In diesem Sinne wirkt gerade die gezielte Automatisierung inklusiv.

Zusammenfassung

Inklusive Schule braucht eine inklusive Didaktik. Wir müssen unseren Blick auf die Lernprozesse verändern und müssen sensibel dafür werden, wie die Lernziele, Methoden und Organisationsformen eines Schulwesens, das über mehr als ein Jahrhundert als ein auf Selektion ausgerichtetes gewachsen ist, selbst zu Faktoren dieser Selektion geworden sind.

Nimmt man den Anspruch *›Eine Schule für alle!‹* ernst, so reicht es nicht, die strukturellen Fehlanlagen des Gesamtsystems durch immer stärker individualisierte Begleitungs- und Stützungsmaßnahmen zu puffern. Das überfordert die Ressourcen und wird auch dem Anliegen nicht gerecht. Gefordert ist vielmehr ein Umbau im Blick auf die Inhalte, die Methoden und die Organisationsformen. Für den Bereich des Rechnen Lernens sollten mit diesem Aufsatz Vorschläge gemacht werden, die die Diskussion in diese Richtung unterstützen können.

Literatur

Dehaene, Stanislas (1999): Der Zahlsinn, Basel
Gerster, Hans Dieter/Schultz, Rita (2006): Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte (Download unter: opus.bsz-bw.de/phfr/volltexte/2007/16/pdf/gerster.pdf)
V. HENTIG, Hartmut (1985): Wie frei sind freie Schulen?, Stuttgart
PETERSEN, Peter (1970):Führungslehre des Unterrichts, Weinheim/Basel
RÖDLER, Klaus (1987): Vergessene Versuchsschulen, Weinheim/München
RÖDLER, Klaus (2005): ›Erbsen, Bohnen, Rechenbrett‹, Seelze
RÖDLER, Klaus (2006): Black socks, in: Grundschule Mathematik 9, Velber
RÖDLER, Klaus (2010): ›Dyskalkulieprävention durch das Rechnen mit Bündelungsobjekten‹, in: SWZ 114, Halbergmoos
RÖDLER, Klaus (2012): ›Frühe Alternativen zum Zählen‹, in: SWZ 129, Halbergmoos
RÖDLER, Klaus (2013): ›Die rot-blauen Würfel und Fünferstangen‹, Frankfurt
www.rechnen-durch-handeln.de

Anschrift des Verfassers:
Dr. Klaus Rödler,
Reuterweg 69,
60323 Frankfurt a.M.

Buchrezensionen

Nicole Schuster, Ute Schuster, Vielfalt leben – Inklusion von Menschen mit Autismus-Spektrum-Störungen. Mit praktischen Ratschlägen zur Umsetzung in Kita, Schule, Ausbildung, Beruf und Freizeit, Kohlhammer Verlag, 2013

Nicole Schuster, Fachjournalistin und Apothekerin, und Ute Schuster, Integrationshelferin für Kinder mit Autismus-Spektrum-Störungen, legen ein Buch vor, in dem sie entlang der Stationen des Lebenslaufs in einer Verschränkung von Falldarstellung und Institutionenbeschreibungen Herausforderungen und Schwierigkeiten von Menschen mit Autismus-Spektrum-Störung schildern und Hinweise zu einer besseren Integration geben.

Nach einem Geleitwort der Vorsitzenden des Bundesverbandes autismus Deutschland e.V. erläutert das Vorwort das zentrale Anliegen der Autorinnen: »Dieses Buch zeigt, was Inklusion ist und wie sie für Menschen mit Autismus-Spektrum-Störungen umgesetzt werden kann« (S. 13).

Dazu werden im 1. Kapitel *Einführung: Autisten und das Inklusionsgesetz* zum einen die Beeinträchtigungen und zum anderen das Inklusionsgesetz dargestellt. Das Kapitel wird durch ein Interview mit Hansjörg Elsler vom »Arbeitskreis Eltern Behinderter« abgeschlossen.

Das 2. bis 6. Kapitel wird jeweils durch einen Ausschnitt aus Karlas Tagebuch eingeleitet. Kapitel 2 befasst sich mit dem *Kindergarten*, Kapitel 3 mit der *Schule*, Kapitel 4 mit *Autismus und Studium*, Kapitel 5 mit der *Berufswelt*, Kapitel 6 mit *Inklusion auf allen Ebenen*. Das abschließende 7. Kapitel trägt die Überschrift *»Innovative, experimentelle Ideen für die Praxis«*. Es schließen sich umfangreiche Literaturempfehlungen an.

Um das Vorgehen der Autorinnen anschaulich zu machen, greife ich exemplarisch Kapitel 2 und 6 heraus. Der einleitende Tagebucheintrag skizziert die Vorgeschichte des jetzt 4jährigen Bens aus Perspektive der Mutter einschließlich der ehelichen Konflikte im Hinblick auf den Umgang mit dem Sohn. Aktuell geht es um den Besuch des Kindergartens. Das nächste Unterkapitel steht unter der Überschrift *Kindergarten – wozu ist der gut?* Ein knapper historischer Abriss, der rechtliche Rahmen in SGB VIII §22 zur Aufgabe leiten es ein. Bezogen auf